Zur Theorie der Gasdiffusion.

II. Theil.

Von dem c. M. **Ludwig Boltzmann** in Graz.

VII. Abschnitt.

Entwickelung und Eintheilung der Gleichungen, welche für den Fall gelten, dass die Moleküle der diffundirenden Gase gleiche Masse besitzen.

Ich habe im I. Theile meiner Theorie der Gasdiffusion das Problem ganz allgemein behandelt. Die grosse Complication der daselbst aufgestellten Gleichungen rührt hauptsächlich von der damit verbundenen Voraussetzung her, dass die Moleküle der diffundirenden Gase verschiedene Massen besitzen. Es scheint mir nützlich, auch die Gestalt der einfacheren Gleichungen zu untersuchen, welche man erhält, wenn man die Massen der Moleküle der diffundirenden Gase als gleich voraussetzt. Die so erhaltenen Gleichungen entsprechen freilich nicht mehr dem allgemeinsten Falle der Diffusion, allein sie werden immerhin noch in den in der Natur nicht so gar seltenen Fällen Anwendung finden können, dass die Moleküle zweier Gasarten genau oder wenigstens nahezu gleich sind. Ich will da von den Gleichungen 35) und 36) Pag. 76 des I. Theiles meiner Theorie der Gasdiffusion ausgehen, in welchen ich $m = M$ setze.

Um einige Buchstaben zu ersparen, will ich jetzt die wirkliche Geschwindigkeit eines Gasmoleküls mit v_w, deren Componenten mit ξ_w, η_w, ζ_w bezeichnen, und statt dieser Grössen die Variablen $v = v_w . \sqrt{hm}$, $\xi = \xi_w . \sqrt{hm}$, $\eta = \eta_w . \sqrt{hm}$, $\zeta = \zeta_w . \sqrt{hm}$ einführen.

$f(\xi, \eta, \zeta) . d\xi . d\eta . d\zeta$ soll die Wahrscheinlichkeit sein, dass die jetzt gebrauchten Variablen ξ, η, ζ zwischen den Grenzen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen, dass also die wirklichen Geschwindigkeitscomponenten ξ_w, η_w, ζ_w zwischen den Grenzen

$$\frac{\xi}{\sqrt{hm}} \text{ und } \frac{\xi + d\xi}{\sqrt{hm}} \text{ etc.}$$

liegen, daher ist $(\sqrt{hm})^3 f(\xi_w\sqrt{hm}, \eta_w\sqrt{hm}, \zeta_w\sqrt{hm})\, d\xi_w d\eta_w d\zeta_w$ die Wahrscheinlichkeit, dass ξ_w, η_w, ζ_w zwischen den Grenzen ξ_w und $\xi_w + d\xi_w$ u. s. w. liegen. Es tritt also an Stelle der im I. Theile gebrauchten Function $f(\xi, \eta, \zeta)$ jetzt der Ausdruck:

$$(\sqrt{hm})^3 f(\xi\sqrt{hm}, \eta\sqrt{hm}, \zeta\sqrt{hm}),$$

d. h. hat man f gefunden, so ist es mit $\sqrt{hm^3}$ zu multipliciren, dann darin $\xi\sqrt{hm}$ für ξ etc. zu schreiben, und endlich mit $d\xi d\eta d\zeta$ zu multipliciren, um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass ξ_w zwischen ξ und $\xi + d\xi$ etc. liegt, daher tritt an die Stelle der Gleichung 1) auf Seite 64 die folgende:

$$\begin{aligned}\sqrt{hm}\frac{\partial f}{\partial t} + \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} \int d\omega_1 \int p dp \int d\varphi . r(ff_1 - f'f'_1) + \\ + \int d\Omega \int p dp \int d\varphi . r(fF - f'F') = 0 \qquad 77)\end{aligned}$$

Hiebei ist natürlich $r = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$, also ebenfalls die mit $\sqrt{hm}$ multiplicirte relative Geschwindigkeit der beiden Moleküle, Ξ, H, Z sind auch die mit $\sqrt{hm}$ multiplicirten Geschwindigkeitscomponenten der zweiten Gasart.

Es empfiehlt sich ferner in den folgenden Gleichungen die mit $\sqrt{hm}$ multiplicirte Geschwindigkeit eines Moleküls der zweiten Gasart geradeso wie die eines Moleküls der ersten Gasart mit v zu bezeichnen, da ja beide in den folgenden Gleichungen bloss die Rolle von independenten Variablen spielen und eine Unterscheidung derselben nicht weiter nothwendig scheint. An Stelle der Gleichungen 3) auf Seite 64 schreiben wir dann:

$$\left.\begin{aligned} f &= [c + \gamma x + \xi . \varphi(v^2)]e^{-v^2} \\ F &= [C + \Gamma x + \xi . \Phi(v^2)]e^{-v^2} \end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

Behufs Vergleichung der früher gebrauchten Buchstaben mit den jetzt gebrauchten, wollen wir ersteren den Index w, letzteren den Index i geben. Wir haben also

$$f_w(\xi,\eta,\zeta) = (\sqrt{hm})^3 f_i(\xi\sqrt{hm}, \eta\sqrt{hm}, \zeta\sqrt{hm} \qquad 79)$$

daher gemäss der Gleichungen 78) und 3)

$$\sqrt{hm}^3[c_i+\gamma_i x+\xi\sqrt{hm}\varphi_i(v^2\sqrt{hm})]e^{-v^2hm} = (c_w + x\frac{dc_w}{dx}+c_w\xi\varphi_w(v^2))e^{-hmv^2}$$

woraus folgt:

$$c_w = c_i(\sqrt{hm})^3,\ c_w\varphi_w(v^2) = h^2m^2\varphi_i(v^2hm),\ (\sqrt{hm})^3\gamma_i = \frac{dc_w}{dx} \qquad \ldots 80)$$

die Gleichungen 35) und 36) verwandeln sich daher in folgende:

$$\frac{v_i}{2\pi\sqrt{hm}}\frac{dc}{dx} + c_w^2\delta^2(a+p-i) + c_w C_w \mu^2(b+q-z-w) = 0$$
$$\frac{v_i}{2\pi\sqrt{hm}}\frac{dc}{dx} + C_n^2\Delta^2(A+P-I) + c_w C_w\mu^2(B+Q-Z-W) = 0 \qquad ..81)$$

Nach Gleichung 38) auf Seite 79 ist

$$c_w a = \frac{\pi}{h^2m^2}v_w c_w \varphi_w(v^2)\left[\frac{1}{2}e^{-hmv_w^2} + \left(v_w\sqrt{hm} + \frac{1}{2v_w\sqrt{hm}}\right)\int_0^{v\sqrt{hm}} dx e^{-x^2}\right] =$$
$$= \frac{\pi v_i}{\sqrt{hm}}\frac{c_w}{h^2m^2}\cdot\varphi_w\left(\frac{v_i^2}{h^2m^2}\right)\left[\frac{1}{2}e^{-v_i^2} + \left(v_i + \frac{1}{2v_i}\right)\int_0^{v_i} dx e^{-x^2}\right] =$$
$$= \frac{\pi v_i}{\sqrt{hm}}\varphi_i(v_i^2)\left[\frac{1}{2}e^{-v_i^2}\left(v_i + \frac{1}{2v_i}\right)\int_0^{v_i} dx e^{-x^2}\right].$$

Bezeichnen wir daher mit g_i oder auch um anzuzeigen, dass diese Grösse bloss Function von v ist, mit $g(v)$ den Ausdruck

$$\varphi_i(v^2)\left[\frac{v}{2}e^{-v^2} + \left(v^2 + \frac{1}{2}\right)\int_0^v dx e^{-x^2}\right] \qquad ..82)$$

so erhält man:

$$c_w a = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} g(v_i).$$

Setzt man in gleicher Weise:

$$G_i = G(v) = \Phi_i(v^2)\left[\frac{v}{2}e^{-v^2} + \left(v^2 + \frac{1}{2}\right)\int_0^v dx e^{-x^2}\right] \qquad .83)$$

so ergibt sich:

$$C_w A_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} G(v_i).$$

Ferner erhält man wegen Gleichheit der Massen nach Gleichung 40) auf Seite 79

$$c_w b_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} g(v) \quad \text{und}$$

$$C_w B_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} G(v).$$

Setzen wir weiters:

$$p(v) = {}^2/_3 \int_0^v \varphi(x^2)\, e^{-x^2} dx \left(\frac{x^6}{5v^2} - x^4\right) + {}^2/_3 \int_0^\infty \varphi(x^2) e^{-x^2} \left(\frac{xv^3}{5} - vx^3\right) dx \qquad \ldots 84)$$

$$P(v) = {}^2/_3 \int_0^v \Phi(x^2)\, e^{-x^2} \left(\frac{x^6}{5v^2} - x^4\right) dx + {}^2/_3 \int_v^\infty \Phi(x^2)\, e^{-x^2} \left(\frac{xv^3}{5} - vx^3\right) dx \qquad \ldots 85)$$

so folgt:

$$c_w p_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} p(v)$$

$$C_w q_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} P(v)$$

$$C_w P_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} P(v)$$

$$c_w Q_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} p(v)$$

Endlich setzen wir:

$$i_v = \frac{2}{v^2} \int_0^v \varphi(x^2)\, dx \left[(x^3 - x) \int_0^x e^{-x^2} dx + x^2 e^{-x^2}\right] + \\ + \left[\frac{2v^2 - 2}{v^2} e^{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{2}{v}\right] \int_v^\infty \varphi(x^2)\, x e^{-x^2} dx \qquad \ldots 86)$$

und

$$I_v = \frac{4}{v^2} \int_0^v \Phi(x^2)\, dx \left[\frac{x^3 - x}{2} \int_0^x e^{-x^2} dx + \frac{x^2 e^{-x^2}}{2}\right] + \\ + 2v^2 \left[\frac{v^2 - 1}{2v^4} e^{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{1}{2v^3}\right] \int_v^\infty \Phi(x^2)\, x\, e^{-x^2} dx \qquad .87)$$

so folgt:

$$c_w i_w = \frac{2\pi}{\sqrt{hm}} i(v)$$

$$C_w I_w = \frac{2\pi}{\sqrt{hm}} I(v)$$

$$c_w z_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} i(v)$$

$$C_w w_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} I(v)$$

$$C_w Z_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} I(v)$$

$$c_w W_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} i(v)$$

Berücksichtigt man alle diese Gleichungen und lässt im Folgenden die nun überflüssig gewordenen Indices i weg, so verwandeln sich die Gleichungen 81) in folgende:

$$\begin{aligned} &\frac{v}{2\pi^2}\gamma + \delta^2(cg + cp - 2ci) + \mu^2(Cg + cP - Ci - cI) = 0 \\ &\frac{v}{2\pi^2}\Gamma + \Delta^2(CG + CP - 2CI) + \mu^2(cG + Cp - cI - Ci) = 0 \end{aligned} \qquad 88)$$

Hiebei ist δ die Distanz, bis zu welcher sich die Centra zweier Moleküle der ersten Gasart beim Zusammenstosse nähern, Δ hat dieselbe Bedeutung für die zweite Gasart, während μ die Distanz vorstellt, bis zu welcher sich das Centrum eines Moleküls der ersten Gasart dem eines Moleküls der zweiten Gasart beim Zusammenstosse nähert; stellt man sich daher die Moleküle als vollkommen harte elastische Kugeln vor, so ist jedenfalls $2\mu = \delta + \Delta$. Es dürfte jedoch immerhin von theoretischem Interesse sein, auch andere Werthe von μ der Discussion zu unterwerfen, umsomehr, als die Hypothese der Kugelgestalt der Moleküle auf keinen Fall vollkommen der Wirklichkeit entspricht. Discutiren wir zunächst den einfachsten Fall $\mu = 0$, dann haben die Gleichungen 88) eine sehr einfache Lösung, nämlich $\gamma = \Gamma = 0$, φ und Φ sind zwei beliebige, von einander verschiedene Constante.

Es ist daher jede Gasart unabhängig von der andern im Raume vorhanden und es gilt jede der beiden vorstehenden Gleichungen 89) und 90) auch für ein einziges im Raume vorhandenes Gas, die im früheren discutirte Lösung $\gamma=0$ und $S=$const. der Gleichung 90) entspricht daher dem Falle, dass ein einziges Gas eine constante, progressive Bewegung im Raume besitzt.

Es sei hier noch bemerkt, dass für den Fall $\gamma=0$ offenbar keine andere Lösung bestehen kann, da bei constanter Dichte des Gases eine andere stationäre Bewegung nicht denkbar ist. Wäre γ von 0 verschieden, so würden wir den Fall erhalten, dass das Gas in einer cylindrischen Röhre stationär, aber mit einer von Querschnitt zu Querschnitt veränderlichen Dichte und Geschwindigkeit fortströmt. An dem Ende, wo die Dichte am grössten ist, müsste fortwährend neues Gas von der dort herrschenden Geschwindigkeit nachgefüllt werden, welches in Folge des dort vorhandenen Druckes mit wachsender Geschwindigkeit gegen das andere Ende der Röhre strömen würde. Jedoch müsste der Überdruck so regulirt sein, dass an einer und derselben Stelle des Raumes die Geschwindigkeit im Verlaufe der Zeit sich nicht ändern würde. Nach den Vorstellungen der Hydrodynamik wäre dieser Zustand als eine plane Schallwelle zu bezeichnen, die sich in einem Gase fortpflanzen würde, während gleichzeitig das Gas im entgegengesetzten Sinne eine der Schallgeschwindigkeit gleiche Progressivbewegung hätte, so dass die Schallwelle immer an derselben Stelle des Raumes stehen bliebe. Es fällt hiebei freilich sogleich auf, dass bei einer derartigen Schallwelle, welche wir als eine stationäre bezeichnen wollen, die Geschwindigkeit des Gases wenigstens stellenweise der Schallgeschwindigkeit gleich sein müsste, während wir angenommen haben, dass die sichtbare Geschwindigkeit des Gases immer klein gegenüber der Progressivbewegung der einzelnen Moleküle ist. Soviel ist klar, dass, wenn die Gleichung 89) sobald γ von 0 verschieden ist, überhaupt eine reelle Lösung hat, der eine physikalische Bedeutung zukommt, dieselbe jedenfalls mit dem Vorfalle der Gasdiffusion, welcher uns jetzt allein interessirt, in gar keinem Zusammenhange steht, wesshalb wir uns auch hier nicht weiter in eine Discussion der, wie es scheint, äusserst schwierig zu behandelnden Gleichung 89) einlassen wollen.

Wir wollen jetzt sogleich zur Behandlung der Gleichungen 88) in ihrer allgemeinsten Gestalt übergehen. Wir setzen zunächst zur Abkürzung:

$$(\delta^2 c+\mu^2 C)\varphi(x)+(\mu^2 c+\Delta^2 C)\Phi(x)=\Psi(x)$$

und bezeichnen mit $a'\,p'\,i'$ die Ausdrücke, welche aus $a\,p\,i$ entstehen, sobald, man darin $\Psi(x)$ an die Stelle von $\varphi(x)$ setzt, dann liefert die Addition der beiden Gleichungen 88)

$$\frac{v(\gamma+\Gamma)}{2\pi^2}+g'+p'-2i'=0 \qquad .91)$$

Diese Gleichung hat vollkommen die Form der Gleichung 89), sollte daher die letztere, sobald γ von 0 verschieden ist, eine Lösung besitzen, so würde auch die Gleichung 91) eine ganz analoge Lösung für den Fall haben, dass $\gamma+\Gamma$ nicht $=0$ ist; in dieser Lösung würde bloss die $\Psi(x)$ an die Stelle von $\delta^2 c\varphi(x)$ treten. Es spielt also in Bezug auf diese Gleichung das Gasgemisch durchaus keine andere Rolle als ein einzelnes Gas, wie es auch a priori evident ist. Wir wollen uns hier wieder bloss mit dem Vorgange der Diffusion beschäftigen und denjenigen Vorgang, den wir im früheren als stationäre Wellenbewegung bezeichnet haben, von vorneherein ausschliessen.

Wir müssen also setzen

$$\gamma+\Gamma=0$$

und erhalten dann analog wie bei Gleichung 89) nur eine Lösung der Gleichung 91), nämlich $\Psi=$ const., d. h. das Gasgemisch hat eine constante Progressivgeschwindigkeit. Bei dem reinen Vorgange der Diffusion muss auch diese ausgeschlossen werden, und es ist daher zu setzen

$$\Psi(x)=(\delta^2 c+\mu^2 C)\varphi(x)+(\mu^2 c+\Delta^2 C)\Phi(x)=0 \qquad .92)$$

In diesem Falle liefert die erste der Gleichungen 88)

$$\frac{v}{2\pi^2}\gamma+(\delta^2 c+\mu^2 C)g+\frac{(\delta^2\Delta^2-\mu^4)\,C}{\delta^2 c+\mu^2 C}\cdot p=\frac{\delta^2\mu^2 c^2+2\delta^2\Delta^2 cC+\mu^2\Delta^2 C^2}{\mu^2 c+\Delta^2 C}\cdot i \qquad .93)$$

Die Gleichung 93) vereinfacht sich noch in dem Falle, dass $\mu^2=\delta\Delta$ ist; setzt man alsdann

In der That wird alsdann nach Gleichung 82)

$$g = \varphi\left[\frac{v}{2}e^{-v^2} + \left(v^2 + \frac{1}{2}\right)\int_0^v e^{-x^2}dx\right].$$

Ferner liefert die Gleichung 84)

$$p = \frac{2}{3}\varphi\int_0^v e^{-x^2}dx\left(\frac{x^6}{5v^2} - x^4\right) + \frac{2}{3}\varphi\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{xv^3}{5} - vx^3\right)dx$$

Wegen

$$\int_0^v e^{-x^2}x^{2n}dx = -\frac{v^{2n-1}e^{-v^2}}{2} + \frac{2n-1}{2}\int_0^v e^{-x^2}x^{2n-2}dx$$

verwandelt sich die erste Zeile des obigen Ausdrucks in

$$\frac{2}{3}\varphi\left[-\frac{v^3e^{-v^2}}{10} + \left(\frac{1}{2v^2} - 1\right)\int_0^v e^{-x^2}x^4dx\right]$$

Ferner ist:

$$\int_0^v e^{-x^2}x^4dx = -\frac{v^3e^{-v^2}}{2} + \frac{3}{2}\int_0^v e^{-x^2}x^2dx =$$

$$= -\frac{v^3e^{-v^2}}{2} - \frac{3}{4}ve^{-v^2} + \frac{3}{4}\int_0^v e^{-x^2}dx$$

Es ist daher der erste Summand des Ausdrucks p

$$= \varphi\left\{\frac{1}{4v^2} - \frac{1}{2}\right\}\int_0^v e^{-x^2}dx + \varphi\left(\frac{v}{3} - \frac{1}{4v} + \frac{4}{15}v^3\right)e^{-v^2}$$

Ferner ist:

$$\int_v^\infty e^{-x^2}x\,dx = \frac{1}{2}e^{-v^2} \quad \text{und}$$

$$\int_v^\infty e^{-x^2}x^3dx = \frac{v^2+1}{2}\cdot e^{-v^2}$$

daher wird der zweite Summand des Ausdrucks p

$$= \varphi e^{-v^2}\left(-\frac{4v^3}{15} - \frac{v}{3}\right)$$

daher

$$p = \varphi\left(\frac{1}{4v^2} - \frac{1}{2}\right)\int_0^v e^{-x^2}dx - \frac{\varphi e^{-v^2}}{4v}$$

Weiters erhält man aus Gleichung 86)

$$i = \frac{4\varphi}{v^2}\int_0^v dx\left[\frac{x^3-x}{2}\int_0^x e^{-x^2}dx + \frac{x^2e^{-x^2}}{2}\right] +$$
$$+4v^2\varphi\left[\frac{v^2-1}{2v^4}e^{v^2}\int_0^v e^{-x^2}dx + \frac{1}{2v^3}\right]\int_v^\infty xe^{-x^2}dx$$

Hier erhält man durch partielle Integration:

$$\int_0^v \frac{x^3-x}{2}dx\int_0^x e^{-x^2}dx = \left(\frac{v^4}{8}-\frac{v^2}{4}\right)\int_0^v e^{-x^2}dx - \int_0^v e^{-x^2}dx\left(\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right)$$

daher wird die erste Zeile des Ausdrucks

$$i = \varphi\left(\frac{v^2}{2}-1\right)\int_0^v e^{-x^2}dx + \frac{\varphi}{v^2}\int_0^v e^{-x^2}dx\left(3x^2-\frac{x^4}{2}\right) =$$
$$= \varphi\left(\frac{v^2}{2}-1\right)\int_0^v e^{-x^2}dx + \varphi\frac{ve^{-v^2}}{4} - \frac{9\varphi}{8v}e^{-v^2} + \frac{9\varphi}{8v^2}\int_0^v e^{-x^2}dx$$

die zweite Zeile des Ausdrucks i aber ist:

$$\varphi\left[\frac{v^2-1}{v^2}\int_0^v e^{-x^2}dx + \frac{e^{-v^2}}{v}\right]$$

daher folgt

$$i = \varphi\left\{\left(\frac{v^2}{2}+\frac{1}{8v^2}\right)\int_0^v e^{-x^2}dx + \left(\frac{v}{4}-\frac{1}{8v}\right)e^{-v^2}\right\}$$

die Substitution dieser Werthe liefert $g+p-2i=0$ und da ganz in analoger Weise auch folgen muss $G+P-2I=0$, so sind die beiden Gleichungen 88) erfüllt. Es ist dies übrigens auch selbstverständlich, da ja die Annahme $\mu=0$ darauf hinausläuft, dass die beiden Gasarten keine Wirkung aufeinander ausüben. Es kann daher jede von der andern unabhängig sich mit beliebiger constanter Geschwindigkeit im Raume fortbewegen.

Im Falle $\mu=0$, reduciren sich die beiden Gleichungen 88) auf:

$$\frac{v}{2\pi^2}\gamma+\delta^2c(g+p-2i)=0 \qquad .89)$$

$$\frac{v}{2\pi^2}\Gamma+\Delta^2C(G+P+2I)=0 \qquad .90)$$

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{\mu}{\Delta} = \sqrt{k},$$

so geht die Gleichung 93) über in:

$$\gamma = 2\pi^2\delta^2 . \frac{kc + C}{k} . \frac{i - g}{v} \qquad .94$$

Die Gleichung 94) begreift den wichtigen Fall, dass $k = 1$ ist, in sich, dass also die Moleküle beider diffundirenden Gase sowohl gleiche Masse als gleichen Durchmesser haben; es ist dies der Fall, welchen Maxwell als den der Diffusion in sich selbst bezeichnet.

VIII. Abschnitt.

Diffusion in sich selbst.

Wir wollen uns zunächst mit diesem einfachsten Falle befassen und setzen

$$\frac{k\gamma}{2\pi^2\delta^2(kc + C)} = \beta \qquad .95)$$

also für den Fall der Diffusion in sich selbst

$$\beta = \frac{\gamma}{2\pi^2\delta^2(c + C)} \qquad .96)$$

dann liefert die Gleichung 94)

$$\beta v = i - g \qquad ..97)$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen 82) und 86)

$$\begin{aligned}\beta v^3 = 2\int_0^v \varphi(x^2) dx\left[(x^3 - x)\int_0^x e^{-x^2} dx + x^2 e^{-x^2}\right] + \\ + \left[(v^2 - 1)e^{v^2}\int_0^v e^{-v^2} dv + v\right]\int_v^\infty 2x\varphi(x^2) e^{-x^2} dx - \\ - \varphi(v^2)\left[\frac{v^3}{2}e^{-v^2} + \left(v^4 + \frac{v^2}{2}\right)\right]\int_0^v e^{-v^2} dv.\end{aligned} \qquad .98)$$

Diese Gleichung kann zunächst wieder zur Gewinnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung verwerthet werden. Ihre Ableitung lautet:

$$3\beta v^2 = \varphi(v^2)\left[(-4v^3 - v)\int_0^v e^{-v^2} dv - 2v^2 e^{-v^2}\right] - v\varphi'(v^2)\left[v^3 e^{-v^2} + (2v^4 + v^2)\int_0^v e^{-v^2} dv\right] + \left[2v^3 e^{v^2}\int_0^v e^{-v^2} dv + v^2\right]\int_v^\infty \varphi(x^2) 2x e^{-x^2} dx \quad ..99)$$

Setzt man hier $v^2 = x$,

$$2\sqrt{x} e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-x^2} dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(2x)^n}{1\underset{\smile}{2}(2n-1)} = \xi$$

und

$$\int_u^\infty \varphi(u) e^{-u} du = y(u) = b - \tau_0 u - (\tau_1 - \tau_0)\frac{u^2}{2!} - \frac{\tau_2 - 2\tau_1 + \tau_0}{3!} u^3 - .$$

so dass

$$\varphi(u) = -y' e^u, \quad \varphi'(u) = -(y'' + y') e^u,$$

$$\int_v^\infty \varphi(x^2)\, x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} y(v^2), \quad \frac{d\xi}{dx} = \left(1 + \frac{1}{2x}\right)\xi + 1$$

so lautet die obige Gleichung

$$3\beta x = y''\left[x^2 + \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)\xi\right] + y'\left[x^2 + 2x + \left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right)\xi\right] + (x + x\xi) y \quad .100)$$

$$\varphi'\left[x^2 + \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)\xi\right] + \varphi\left[2x + \left(2x + \frac{1}{2}\right)\xi\right] - - e^x (x + x\xi)\left[b - \int_0^x e^{-x}\varphi(x) dx\right] = 3\beta x e^x$$

Da mir die Auflösung dieser Differentialgleichung nicht gelungen ist, so wollen wir wieder zur Reihenentwickelung unsere Zuflucht nehmen. Vergleicht man die Gleichungen 86) und 49), letztere im ersten Theile, so sieht man, dass die hier gebrauchte Grösse i aus den dort gebrauchten gebildet wird, indem man diese mit 2π dividirt und $hm = 1$. Es liefert also die Formel 47)

$$i = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+1) 2^n v^{2n+1} b}{1\underset{\smile}{2}(2n+3)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} v^{2n+3} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{n-k+1}(2n-2k+1)}{1\underset{\smile}{2}(2n-2k+3)} .$$

$$\frac{\binom{k}{0}\tau_k-\binom{k}{1}\tau_{k-1}+\ldots}{k!}\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2k+2}\right)=b\left(\frac{v}{3}+\frac{2v^3}{5}+\frac{4v^5}{3.7}+\frac{8v^7}{3.5.9}+\right.$$

$$\left.+\frac{16v^9}{3.5.7.11}+\frac{32v^{11}}{3.5.7.9.13}+\ldots\right)-\tau_0\left(\frac{v^3}{5}+\frac{3v^5}{14}+\frac{v^7}{18}+\frac{19v^9}{3.5.8.11}+\right.$$

$$\left.+\frac{83v^{11}}{5.7.8.9.13}+\ldots\right)-\tau_1\left(\frac{v^5}{14}+\frac{2v^7}{27}+\frac{v^9}{8.11}+\frac{7v^{11}}{4.5.9.13}+\ldots\right)-$$

$$-\tau_2\left(\frac{v^7}{54}+\frac{5v^9}{3.8.11}+\frac{v^{11}}{5.9.13}+\ldots\right)-\tau_3\left(\frac{v^9}{3.8.11}+\frac{v^{11}}{4.5.13}+\ldots\right)$$

$$-\frac{\tau_4 v^{11}}{3.5.8.13}- \qquad 101)$$

wobei

$$b=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-x}\,dx \qquad .102)$$

ist. In gleicher Weise liefert die Vergleichung der Formeln 82) und 83) $g=\frac{a}{\pi}$ darin $hm=1$ gesetzt, also wenn man überall die Exponentielle in eine Reihe entwickelt

$$g=\left(\tau_0+\frac{\tau_1 v^2}{1!}+\frac{\tau_2 v^2}{2!}+\ldots\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}v^{2n+1}}{n!(4n^2-1)}=v\tau_0+v^3\left(\tau_1+\frac{\tau_0}{3}\right)+$$

$$+v^5\left(\frac{\tau_2}{2}+\frac{\tau_1}{3}-\frac{\tau_0}{30}\right)+v^7\left(\frac{\tau_3}{6}+\frac{\tau_2}{6}-\frac{\tau_1}{30}+\frac{\tau_0}{2.3.5.7}\right)+v^9\left(\frac{\tau_4}{2.3.4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau_3}{2.9}-\frac{\tau_2}{4.3.5}+\frac{\tau_1}{2.3.5.7}-\frac{\tau_0}{2.3.4.7.9}\right)+$$

$$+v^{11}\left(\frac{\tau_5}{2.3.4.5}+\frac{\tau_4}{8.9}-\frac{\tau_3}{4.9.5}+\frac{\tau_2}{4.3.5.7}-\frac{\tau_1}{8.27.7}+\frac{\tau_0}{8.27.5.11}\right)+\ldots \qquad 103)$$

Es ist also $g=\frac{R}{v}$, wenn wir mit R dieselbe Grösse, wie im dritten Theile der Theorie der Gasreibung, Seite 1245, bezeichnen. Diese Werthe in die Gleichung 97) substituirt liefern nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten:

$$\tau_0 = \frac{b}{3} - \beta,\ \tau_2 = -\frac{17\tau_1}{21} - \frac{38\tau_0}{105} + \frac{8b}{21}$$

$$\tau_1 = \frac{2b}{5} - \frac{8\tau_0}{15}$$

wobei β als gegebene Constante zu betrachten ist, b dagegen muss erst zum Schlusse durch wirkliche Ausrechnung des Integrales der Gleichung 102) bestimmt werden. Da

$$\tau_0 = \varphi(o),\ \tau_1 = \varphi'(o),\ \tau_2 = \varphi''(o).$$

so folgt dann $\varphi(x)$ nach der Maclaurin'schen Reihe. Die Gleichung 100) kann zum selben Zwecke dienen, wenn man darin

$$y^{(k)} = y^k(o) + xy^{k+1}(o)\ldots,\ \xi = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(2x)^n}{1\underline{2}\,(2n-1)}$$

setzt, und die Coëfficienten sämmtlicher Potenzen von x gleich Null setzt. Um für sehr grosse Argumente eine semiconvergente Reihe zu erhalten, kann man folgendermassen verfahren. Man setzt:

$$h = 2\int_0^\infty \varphi(x^2)x^2 e^{-x^2}dx + 2\int_0^\infty \left[\varphi(x^2) - \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^3}\right]x^3dx\int_v^x e^{-x^2}hx + $$
$$+ 2\int_0^\infty \left[\frac{c}{x} - \varphi(x^2)\right]xdx\int_0^x e^{-x^2}dx \qquad \ldots 104)$$

dann verwandelt sich die Gleichung 98) in

$$\beta v^3 = [(v^2-1)e^{v^2}\int_0^v e^{-v^2}dv + v]\int_v^\infty 2x\varphi(x^2)e^{-x^2}dx$$
$$-\varphi(v^2)\left[\frac{v^3}{2}e^{-v^2} + \left(v^4 + \frac{v^2}{2}\right)\int_0^v e^{-v^2}dv\right] + h -$$
$$-2\int_v^\infty \varphi(x^2)x^2e^{-x^2}dx - 2\int_v^\infty \left[\varphi(x^2) - \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^3}\right]x^3dx\int_0^x e^{-x^2}dx +$$
$$+ 2\int_v^\infty [\varphi(x^2) - \frac{c_0}{x}]xdx\int_o^x e^{-x^2}dx - 2c_0\int_0^v dx\int_0^x e^{-x^2}dx$$
$$+ 2\int_0^v dx(c_0x^2 + c_1)\int_0^x e^{-x^2}dx. \qquad \ldots 105)$$

Diese Gleichung werden wir später benützen, um über die Grösse h einen Schluss zu ziehen, da aus derselben folgt, dass h verschwinden muss, sobald $\varphi(v^2)$ für grosse v in der Form

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c^n}{v^{2n+1}}$$

darstellbar ist. Man könnte sie auch benützen, um die Coëfficienten dieser Entwickelung zu bestimmen, indem man einfach in die Gleichung für φ jene Reihe substituirt. Doch führt es kürzer zum Ziele, hiezu die Gleichung 99) zu benutzen. Für grosse v reducirt sich dieselbe zunächst, indem man Glieder von der Ordnung e^{-v^2} vernachlässigt auf

$$\frac{6\beta}{\sqrt{\pi}}v^2+\varphi(v^2)(4v^3+v)+v\varphi'(v^2)(2v^4+v^2)-$$
$$-4v^3e^{v^2}\int_v^\infty \varphi(x^2)xe^{-x^2}\,dx=0 \qquad .106)$$

Die Differentation dieser Gleichung aber liefert:

$$(2v^4+v^2)\varphi \ldots v^2)+$$
$$+\left(-2v^2-1-\frac{1}{v^2}\right)\varphi(v^2)=\left(2v+\frac{1}{v}\right)\frac{3\beta}{\sqrt{\pi}} \qquad .107)$$

eine Gleichung, welche man übrigens auch leicht direct aus der Gleichung 100) hätte erhalten können; denn wenn man Glieder von der Grössenordnung e^{-v^2} vernachlässigt, so ist $\xi=\sqrt{\pi x}e^x$, daher geht 100) über in

$$(2x+1)y''+\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)y'+2y=\frac{6\beta}{\sqrt{\pi x}}e^{-x} \qquad 108)$$

was durch Differentiation liefert

$$(2x+1)y'''+\left(2x+7+\frac{1}{x}\right)y''+\left(4-\frac{1}{x^2}\right)y'=-\frac{3\beta}{\sqrt{\pi x}}e^{-x}\left(2+\frac{1}{x}\right) \qquad 109)$$

was mit der obigen Gleichung 107) identisch ist. Diese Gleichung ist besonders geeignet zur Bestimmung der Coëfficienten der semiconvergenten Reihe.

Setzt man nämlich

$$\varphi(v^2)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_n}{v^{2n+1}},\ \varphi'(v^2)=-\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2n+1)c_n}{2v^{2n+3}},$$

$$\varphi''(v^2)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)c_n}{4v^{2n+5}} \qquad .110)$$

so folgt:

$$\frac{6\beta}{\sqrt{\pi}}v+\frac{3\beta}{v\sqrt{\pi}}=-c_0v+\frac{c_1-2c_0}{v}+\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{v^{2n+3}}[(2n+3)c_{n+2}+$$

$$+(2n^3+3n-1)c_{n+1}+\frac{1}{4}(2n+3)(2n-1)c_n]$$

und hieraus ergibt sich

$$c_0=-\frac{6\beta}{\sqrt{\pi}},\ c_1=-\frac{9\beta}{\sqrt{\pi}},\ c_{n+2}=\frac{2n^2+3n-1}{2n+3}c_{n+1}+\frac{2n-1}{4}c_n \qquad 111)$$

Folgendes wäre nun der Weg zur numerischen Bestimmung der Function φ. Man berechnet sie zunächst mit Hilfe der Maclaurin'schen Reihe für kleine Argumente mittelst der Formel

$$\varphi(x)=\tau_0+x\tau_1+\frac{x^2}{2!}\tau_2.$$

Hat man die Function $\varphi(x)$ von $x=0$ bis $x=\alpha$ bestimmt, so verwendet man *f* solange eben diese Reihe hinreichend convergirt. Für grössere Argumente $\alpha+\beta$ die Gleichung:

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\beta\varphi'(\alpha)+\frac{\beta^2}{2}\varphi''(\alpha)\dots$$

wobei man $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)\dots$ aus der Gleichung 99) und deren Ableitungen bestimmt. In dieser Gleichung ist

$$\int_\alpha^\infty\varphi(u)e^{-u}du=b-\int_0^\alpha\varphi(u)e^{-u}du$$

zu setzen, wobei $\int_0^\alpha\varphi(u)e^{-u}du$ bezeichnet werden kann, da $\varphi(u)$

von $u=0$ bis $u=\alpha$ bekannt ist, b aber ist als später zu bestimmende Constante mitzunehmen. Für sehr grosse Argumente kann die semiconvergente Reihe benutzt werden und man kann wieder zu kleineren unter Benützung der Reihe

$$\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(\alpha)-\beta\varphi'(\alpha)+\frac{\beta^2}{2}\varphi''(\alpha)\ldots$$

unter Verwendung der Gleichung 99) herabsteigen.

Formeln, welche für den Fall gelten, dass φ eine ganze positive Potenz ist.

Ehe ich zur Mittheilung numerischer Resultate schreite, will ich noch Rechnungen ausführen, welche den im VII. Abschnitte meiner Theorie der Gasreibung enthaltenen vollkommen analog sind. Wir werden dadurch zwar keine neuen Resultate erhalten, aber wir werden zu Formeln gelangen, welche zur Controle der Rechnungen brauchbar sind, und bei derartigen numerischen Rechnungen ist eine ausgiebige Controle geradezu unerlässlich. Nach Formel 97) hatten wir

$$\beta v^2=i-g=\frac{\gamma v^2}{2\pi^2\delta^2(c+C)}$$

Gemäss der Gleichung, welche auf die Gleichung 82) folgt und der ersten der Gleichungen, welche auf die Gleichung 87) folgen, ist

$$g=\frac{\sqrt{hm}}{\pi}c_w a,\ i=\frac{\sqrt{hm}}{2\pi}c_w i_w$$

ferner nach den Gleichungen 80)

$$c_w\varphi_w(v^2)=h^2m^2\varphi_i(v^2hm)\quad\text{oder}\quad c_w\varphi_w\left(\frac{u^2}{hm}\right)=h^2m^2\varphi_i(u^2)$$

so dass

$$g=\frac{\sqrt{hm}^5}{\pi}a_w,\ i=\frac{\sqrt{hm}^5}{2\pi}i_w$$

wobei a_w und i_w aus den im I. Theile meiner Theorie der Gasreibung, Seite 77, mit a und i bezeichneten Grössen hervorgehen, indem man in letzteren das Argument v durch $\sqrt{hm}$ dividirt. Es ist also:

$$g = \frac{\sqrt{hm}^5}{\pi} e^{-v^2} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-hmr^2 - 2vrg\sqrt{hm}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s\sigma dS \int_0^{2\pi} dO \frac{v}{\sqrt{hm}} \varphi_i(v^2) =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-v^2} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-r^2 - 2vrg} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s\sigma dS \int_0^{2\pi} dO v \varphi(v^2)$$

$$i = \frac{1}{\pi} e^{-v^2} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-r^2 - 2vrg} \int_0^\pi s\sigma dS \int_0^{2\pi} dO$$

$$(v + rg\sigma^2 - r\gamma s\sigma o)\varphi[v^2 + 2vr(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o) + r^2\sigma^2].$$

Will man zu diesen Gleichungen, welche wir hier nicht ohne Umweg erhielten, direct von den Gleichungen 1) und 2) des ersten Theiles meiner Theorie der Gasdiffusion gelangen, so bezeichne man die mit $\sqrt{hm}$ multiplicirte Geschwindigkeit eines Moleküls mit v und man erhält eine Lösung der Gleichungen 1) und 2) indem man setzt:

$$f = [c + \gamma x + \xi\varphi(v^2)]e^{-v^2}$$
$$F = [C - \gamma x - \xi\varphi(v^2)]e^{-v^2}$$

wobei $fd\xi d\eta d\zeta$ die Anzahl der Moleküle ist, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen $\frac{\xi}{\sqrt{hm}}$ und $\left(\frac{\xi + d\xi}{\sqrt{hm}}\right)$ etc. liegen. Dann ist

$$ff_1 - f'f_1' = ce^{-(v^2+v_1^2)}[\xi\varphi(v^2) + \xi_1\varphi(v_1^2) - \xi'\varphi(v'^2) - \xi_1'\varphi(v_1'^2)]$$

$$fF_1 - f'F_1' = e^{-(v^2+v_1^2)}[C\xi\varphi(v^2) - c\xi_1\varphi(v_1^2) - C\xi'\varphi(v'^2) + c\xi_1'\varphi(v_2'^2)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = \xi\gamma e^{-v^2}$$

die Gleichung 1) des ersten Theiles reducirt sich also auf

$$\xi\gamma e^{-v^2} + \int d\omega_1 \int pdp \int rd\varphi e^{-(v^2+v_1^2)}(c + C)[\xi\varphi(v^2) - \xi'\varphi(v'^2)] = 0$$

Bedenkt man, dass

$$\xi = va,\ \xi' = va + rag\sigma^2 - ra\gamma s\sigma o - ra\gamma k\sigma^2 - r\alpha gks\sigma o - ra\varkappa s\sigma\omega$$

$$d\omega_1 = r^2 dr\gamma dGdK = v_1^2 dv_1 \tau dTdK,\ pdp = \delta^2 s\sigma dS,\ \varphi = 0$$

so folgt:

$$\frac{\gamma v}{2\pi^2\delta^2(c+C)}=i-g$$

wobei g und i die obige Bedeutung haben. Man sieht leicht, dass auch die Gleichung 2) des ersten Theiles erfüllt ist.

Es ist nun unsere Aufgabe die Grösse i für den Fall zu berechnen, dass $\varphi(v^2)$ eine ganze positive Potenz von v^2 ist. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\sigma^2=l,\ g\sigma^2-\gamma s\sigma o=\rho$$

und bezeichnen mit M_p^b den Coëfficienten von $v^{b-1}r^{2p+2-b}$ in $(v+r\rho)(v^2+2vr\rho+r^2l)^p$. Dann erhält man aus M_p^b den Coëfficienten X_p^b derselben Grösse in

$$X_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dO\,.\,(v+r\rho)v'^{2p}$$

durch die Vertauschungen auf Seite 57 des zweiten Theiles meiner Theorie der Gasreibung. Den Coëfficienten Y von $v^{b-1}r^{2p+2-b}$ im Ausdrucke

$$Y_p=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}s\sigma dS\int_0^{2\pi}dO(v+r\rho)v'^{2p}$$

erhält man, indem man l^a vertauscht mit $\frac{1}{a+1}$, $l^a\lambda^c$ mit $\frac{c!}{(a+1)\underline{1}(a+c+1)}$; für letztere Ausdrücke gelten also wieder die Werthe der Seite 58, für erstere um $\frac{1}{2}$ grössere Werthe. Statt γ^2 ist $1-g^2$ zu setzen. Y_p^{2p+2} ist gleich Eins. Aus Y_p wird endlich der Ausdruck

$$U_p=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r^3dr\int_0^{\pi}\gamma dGe^{-2vrg}\int_0^{\frac{\pi}{2}}s\sigma dS\int_0^{2\pi}dO(v+r\rho)v'^{2p}$$

durch die Vertauschung 22) meines zweiten Theiles der Theorie der Gasreibung Seite 58 gebildet. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass hier jeder Coëfficient mit einer um eine Einheit niedrigeren Potenz von v multiplicirt erscheint, wesshalb die Vertauschung

hier folgendermassen lautet. Im Ausdruck Y_p^b ist für g^a zu substituiren:

$$\sum_{\mu \geqq \frac{b}{2}}^{\mu=\infty} \frac{2^{2\mu-b} v^{2\mu-1} (\mu+p-b+2)!}{(2\mu-b)!} \frac{(-1)^b}{(2\mu-b+a+1)}$$

den auf diese Weise aus Y_p^b hervorgehenden Ausdruck bezeichnen wir zunächst mit U_p^b dann ist

$$U_p = \sum_{b=1}^{b=2p+2} U_p^b = i \, . \, e^{v^2}$$

Es ist nicht schwer, auch auf unsern Fall das Schema zur successiven Berechnung von U_p auszudehnen. Es ist nämlich

$$M_p = \rho l^p, \quad X_p^1 = g l^{p+1}, \quad Y_p^1 = \frac{g}{p+2}$$

dieses liefert also in die Summe:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{-2^{2\mu-1} v^{2\mu-1} (\mu+p+1)!}{(2\mu-1)!(2\mu+1)(p+2)} = S_1.$$

Schreiben wir Y_p^2 in der Form SAg^a, so liefert es die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{A 2^{2\mu-2} v^{2\mu-1} (\mu+p)!}{(2\mu-2)!(2\mu-1+a)} = S_2.$$

Wir erhalten also $S_1 + S_2$, indem wir in Y_p^2 vertauschen g^a mit $\frac{2\mu-1}{2\mu-1+a}$ und dazu addiren $-2(\mu+p+1)$. Zur Summe Z_p^2 fügen wir die Ergänzung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{2^{2\mu-2} v^{2\mu-1} (\mu+p)!}{(2\mu-1)!}$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir das Schema:

Factor des vorigen	Vertauschung für g^a	zu machen in	Ergänzung
$2(\mu+p+1)$	$\frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu-1+a}$	Y_p^2	$\sum_1^1 \frac{2^{2\mu-2}v^{2\mu-1}(\mu+p)!}{(2\mu-1)!(2\mu+1)}$
$2(\mu+p)$	$\frac{-(2\mu-2)(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu-2+a}$	Y_p^3	$\sum_1^1 \frac{2^{2\mu-3}v^{2\mu-1}(\mu+p-1)!}{(2\mu-1)!(2\mu+1)}$
$2(\mu+p-1)$	$\frac{(2\mu-3)(2\mu-2)(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu-3+a}$	Y_p^4	$\sum_{2-p}^2 \frac{2^{2\mu-4}v^{2\mu-1}(\mu+p-2)!}{(2\mu-1)!(2\mu+1)}$
. .	. .		
$2(\mu+p-b+3)$	$\frac{(2\mu-b+1)\overset{1}{\smile}(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu-b+1+a}(-1)^b$	Y_p^b	$\sum_{b-p-2}^{<\frac{b+1}{2}} \frac{2^{2\mu-b}v^{2\mu-1}(\mu+p+b+2)!}{(2\mu-1)!(2\mu+1)}$
$(2\mu-p+1)$	$\frac{(2\mu-2p-1)\overset{1}{\smile}(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu-2p-1+a}$	$Y_p^{2p+2}=1$	$\sum_p^\infty \frac{2^{2\mu-2p-2}v^{2\mu-1}(\mu-p)!}{(2\mu-1)!(2\mu+1)}$

Hier ist die erste Vertauschung in Y_p^2 zu machen (auch g^0 ist mit $2\mu+1$ zu vertauschen) und dazu der mit $\frac{-1}{p+2}$ multiplicirte erste Factor zu addiren, die Summen bezeichnen wir mit Z_p^2. Fügt man die erste Ergänzung dazu, so erhält man die Grösse V_p^2, welche nur für $\mu=1$ mit U_p übereinstimmt. Alle andern Factoren sind mit den vorhergehenden Z zu multipliciren. So ist

$$M_0^1=\rho,\ M_0^2=1$$

$$X_0^1=gl,\ X_0^2=1$$

$$Y_0^1=\frac{g}{2},\ Y_0^2=1,\ Z_0^2=\mu$$

$$U_0=\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{2^{2\mu-2}v^{2\mu-1}\mu!\,\mu}{(2\mu-1)!\,(2\mu+1)}$$

$$M_1^2=2\rho^2+l,\ M_1^3=3\rho,\ M_1^4=1$$

$$X_1^2=2g^2l^2+\gamma^2l\lambda+l,\ X_1^3=3gl,\ X_1^4=1$$

$$Y_1^2={}^2/_3+\frac{g}{2},\ Y_1^3={}^3/_2g,\ Y_1^4=1$$

$$Z_1^2={}^1/_6(10\mu-7),\ Z_1^3={}^1/_3(-8\mu^2+12\mu+2),\ Z_1^4={}^2/_3(4\mu^3-\mu+3)$$

$$U_1=\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{2^{2\mu-3}v^{2\mu-1}(\mu-1)!\,(4\mu^3-\mu+3)}{3(2\mu-1)!\,(2\mu+1)}$$

$$M_2^1=\rho l^2, M_2^2=4\rho^2l+l^2, M_2^3=4\rho^3+6\rho l, M_2^4=8\rho^2+2l, M_2^5=5\rho, M_2^6=1$$

$$X_2^1=gl^3, X_2^2=4g^2l^3+2\gamma^2l^2\lambda, X_2^3=4g^3l^3+6g\gamma^2l^2\lambda+6gl^2, X_2^4=8g^2l^2+ \\ +4\gamma^2l\lambda+2l,\ X_2^5=5gl,\ X_2^6=1$$

$$Y_2^1={}^1/_4g, Y_2^2={}^1/_2+{}^5/_6g^2, Y_2^3={}^5/_2g+{}^1/_2g^3, Y_2^4={}^5/_3g+2g^2, Y_2^5={}^5/_2g, Y_2^6=1$$

$$Z_2^3={}^1/_3(6\mu-7), Z_2^3={}^1/_3(-23\mu^2+39\mu-10), Z_2^4={}^1/_3(42\mu^3-104\mu^2+ \\ +60\mu+26), Z_2^5={}^2/_3(-18\mu^4+76\mu^3-45\mu^2-19\mu+30), Z_2^6={}^4/_3(6\mu^5- \\ -14\mu^4+29\mu^3-19\mu^2+10\mu-12), U_2=\frac{2v}{3}+\sum_{\mu=2}^{\mu=\infty}\frac{2^{2\mu-4}v^{2\mu-1}(\mu-2)!}{3(2\mu-1)!\,(2\mu+1)} \\ (6\mu^5-14\mu^4+29\mu^3-19\mu^2+10\mu-12)$$

Auch die Berechnung der Grösse ie^{v^2} nach der Methode, welche ich im IX. Abschnitte des II. Theiles meiner Theorie der Gasreibung auseinandergesetzt habe, ist zur Controle nicht ohne

Nutzen, wenngleich sie selbstverständlich viel mühevoller ist, als die Anwendung der zu Beginn dieser Abhandlung angewandten Transformation der Coordination. Es bleibt dann fast alles daselbst im IX. Abschnitte Vorgebrachte unverändert; nur an die Stelle von J tritt $r\rho+v$.

Es muss also jetzt gesetzt werden

$$A_n = (r\rho+v)(2vr\rho+v^2)^n = \sum_{m=n+1}^{m=2n+2} A_n^m v^{m-1} r^{2n-m+2}$$

$$(r\rho+v)\varphi(v'^2) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{\varphi^{(n)}(r^2 l)}{n!} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=n+1}^{m=2n+2} A_n^m \frac{\varphi^{(n)}(r^2 l)}{n!} v^{m-1} r^{2n-m+}$$

was liefert

$$A_0^1 = \rho,\ A_0^2 = 1$$
$$A_1^2 = 2\rho^2,\ A_1^3 = 3\rho,\ A_1^4 = 1$$
$$A_2^3 = 4\rho^3,\ A_2^4 = 8\rho^2,$$
$$A_3^4 = 8\rho^4.$$

Hieraus entstehen die B durch die Vertauschungen auf Seite 89 der citirten Abhandlung; es ergibt sich

$$B_0^1 = gl,\ B_0^2 = 1$$
$$B_1^2 = l(1-l)+g^2 l(-1+3l),\ B_1^3 = 3gl,\ B_1^4 = 1$$
$$B_2^3 = 6gl^2(1-l)+2g^3 l^2(-3+5l),\ B_2^4 = 4l(1-l)+4g^2 l(-1+3l)$$
$$B_3^4 = 3l^2(1-2l+l^2)+6g^2 l^2(-1+6l-5l^2)+g^4 l^2(3-30l+35l^2).$$

Weiters findet man durch die Vertauschung auf Seite 81, worin jedoch v^{m-1} statt v^m zu schreiben ist,

$$C_0^1 = -\frac{1}{v}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(4v^2 r^2)^\nu}{(2\nu-1)!(2\nu+1)} = -\frac{4vr^2 l}{3} - \frac{8v^3 r^4 l}{3.5}$$

$$C_0^2 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{2(4v^2 r^2)^\nu v}{(2\nu)!(2\nu+1)} = 2v + \frac{4v^3 r^2}{3},$$

$$C_1^2 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(4v^2 r^2)^\nu vr^2(4l+8\nu l^2)}{(2\nu^2)!(2\nu+1)(2\nu+3)} = \frac{4vr^2 l}{3} + \frac{8v^3 r^4}{15}(l+2l^2)$$

$$C_1^3 = -4v^3r^2l,\ C_1^4 = 2v^3$$

$$C_2^3 = -\frac{16}{5}v^3r^4l^2,\ C_2^4 = \frac{16}{3}v^3r^2l,\ C_3^4 = \frac{16}{5}v^3r^4l^2.$$

Hieraus entstehen die mit D bezeichneten Grössen durch die Vertauschungen auf Seite 113.

$$D_0^1 = -\frac{4}{3}vx - \frac{8}{15}v^3(x^2+x),\ D_0^2 = 2v + \frac{4v^3}{3}(x+1),$$

$$D_1^2 = \frac{4vx}{3} + \frac{8}{15}v^3(3x^2+x),\ D_1^3 = -4v^3x,\ D_1^4 = 2v^3,$$

$$D_2^3 = -\frac{16}{5}v^3x^2,\ D_2^4 = \frac{16}{3}v^3x,\ D_3^4 = \frac{16}{5}v^3x^2.$$

Hieraus findet man endlich durch die Vertauschung auf Seite 118.

$$E_0^1 = -\frac{2v\sigma x}{3} - \frac{4v^3\sigma(x^2+x)}{15},$$

$$E_0^2 = v\sigma + \frac{2v^3\sigma}{3}(x+1)$$

$$E_1^2 = \frac{2v\sigma}{3}(x-1) + \frac{4v^3\sigma}{15}(3x^2-5x-1)$$

$$E_1^3 = -2v^3\sigma(x-1)$$

$$E_1^4 = -\tau_0 v^3 + v^3\sigma$$

$$E_2^3 = -\frac{4}{5}v^3\sigma(x^2-4x+2)$$

$$E_2^4 = +\frac{4\tau_0 v^3}{3} + {}^4/_3\, v^3\sigma(x-2)$$

$$E_3^4 = -\frac{8\tau_0 v^3}{15} + \frac{4v^3\sigma}{15}(x^2-6x+6)$$

$$ie^{v^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\ \sum_{m=n+1}^{m=2n+2} E_n^m = \frac{v\sigma}{3} + \frac{11v^3\sigma}{15} - \frac{v^3\tau_0}{5}$$

Die Grösse σ ist identisch mit der früher mit b bezeichneten. Es stimmt also dieser Werth in den Gliedern mit v und v^3 überein

mit dem durch die Gleichung 101) bestimmten. Doch ist die soeben behandelte Controle in ihrer Ausführung so mühevoll, dass die vorher entwickelte wohl vorzuziehen sein dürfte.

Für die numerische Berechnung sei noch bemerkt, dass an der Stelle von φ die Function

$$\psi(u) = \varphi(u)e^{-u} \qquad \ldots 112)$$

auch eingeführt werden kann. Setzen wir $\sigma_0 = \psi(o)$, $\sigma_1 = \psi'(o)$, $\sigma_2 = \psi''(o) \ldots$ so ist dann:

$$\sigma_0 = \tau_0,\ \sigma_1 = \tau_1 - \tau_0,\ \sigma_2 = \tau_2 - 2\tau_1 + \tau_0,\ \sigma_3 = \tau_3 - 3\tau_2 + 3\tau_1 - \tau_0 \ldots 113)$$

daher liefert die Gleichung 101)

$$i = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+1)2^n v^{2n+1} b}{1\overset{2}{\smile}(2n+3)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} v^{2n+3} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{n-k+1}(2n-2k+1)}{1\overset{2}{\smile}(2n-2k+3)} \frac{\sigma_k}{k!} \left(\frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{vb}{3} +$$

$$+ v^3\left(\frac{2b}{5} + \frac{\sigma_0}{5}\right) + v^5\left(\frac{4b}{3.7} - \frac{2\sigma_0}{7} - \frac{\sigma_1}{2.7}\right) + v^7\left(\frac{8b}{3.5.9} - \frac{4\sigma_0}{3.9} - \frac{\sigma_1}{9} - \frac{\sigma_2}{2.3.9}\right)$$

$$+ v^9\left(\frac{16b}{3.5.7.11} - \frac{8\sigma_0}{3.5.11} - \frac{2\sigma_1}{3.11} - \frac{\sigma_2}{3.11} - \frac{\sigma_3}{3.8.11}\right) + v^{11}\left(\frac{32b}{3.5.7.9.13} -\right.$$

$$\left. - \frac{16\sigma_0}{3.5.7.13} - \frac{4\sigma_1}{3.5.13} - \frac{2\sigma_2}{9.13} - \frac{\sigma_3}{12.13} - \frac{\sigma_4}{120.13}\right) + \ldots \qquad 114)$$

wobei $b = \int_0^\infty \psi(u)du$.

Ferner ist nach Theorie der Gasreibung, II. Theil, Seite 85

$$R = \left(\frac{v^2\tau_0}{0!} + \frac{v^4}{1!}\tau_1 \cdot \quad\right) e^{-v^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2v)^{2n}}{(n+2)\overset{1}{\smile}(2n+1)} =$$

$$= \left(\frac{v^2}{0!}\sigma_0 + \frac{v^4}{1!}\sigma_1 + . \quad\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2v)^{2n}}{(n+2)\overset{1}{\smile}(2n+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} v^{2n+2} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{2n-2k}\sigma_k}{(n-k+2)\overset{1}{\smile}(2n-2k+1)}$$

und wegen $g = \frac{R}{v}$

$$g = \sum_{n=0}^{n=\infty} v^{2n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{2n-2k}\sigma_k}{(n-k+2)^{\underline{1}}(2n-2k+1)k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sigma_k v^{2k+1}}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2^{2n} v^{2n}}{(n+2)^{\underline{1}}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} v^{2n+1} \Big[\frac{2^{2n}\sigma_0}{(n+2)^{\underline{1}}(2n+1)0!} +$$

$$+ \frac{2^{2n-2}\sigma_1}{(n+1)^{\underline{1}}(2n-1)1!} + \frac{2^{2n-4}\sigma_2}{n^{\underline{1}}(2n-3)2!} + \ldots = v\sigma_0 + {}^4/_3 v^3 \sigma_0 +$$

$$+ v^3\sigma_1 + v^5\left(\frac{4\sigma_0}{5} + \frac{4\sigma_1}{5} + \frac{\sigma_2}{2}\right) + v^7\left(\frac{32\sigma_0}{3.5.7} + \frac{4\sigma_1}{5} + \frac{2\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{2.3}\right) +$$

$$+ v^9\left(\frac{16\sigma_0}{3.7.9} + \frac{32\sigma_1}{3.5.7} + \frac{2\sigma_2}{5} + \frac{2\sigma_3}{9} + \frac{\sigma_4}{2.3.4}\right) + v^{11}\left(\frac{64\sigma_0}{5.7.9.11} + \frac{16\sigma_1}{3.7.9} +\right.$$

$$\left. + \frac{16\sigma_2}{3.5.7} + \frac{2\sigma_3}{3.5} + \frac{\sigma_4}{2.9} + \frac{\sigma_5}{2.3.4.5}\right) + . \qquad 115)$$

Obwohl diese Formel etwas einfacher ist als die Formel 114) so zeigt sich doch, dass die Werthe der Grössen τ rascher abnehmen, als die σ.

Zum Schlusse lasse ich noch einige numerische Werthe folgen, welche ich der Güte Herrn Prof. Šantel und Herrn Hausmanninger verdanke. Dabei wurden sowohl die τ als auch die σ berechnet. Als die beiden ersten Ableitungen der Gleichung 100) ergab sich

$$y'''[x^2 + (x^2 + \frac{x}{2})\xi] + y''[2x^2 + \frac{9}{2}x + (2x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{4})\xi] +$$

$$y'[x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} + (x^2 + 6x + \frac{17}{4} + \frac{1}{4x})\xi] + y[x + 1 + (x + \frac{3}{2})\xi] = 3\beta$$

$$y^{\mathrm{IV}}[x^2 + (x^2 + \frac{x}{2})\xi] + y'''[3x^2 + 7x + (3x^2 + \frac{17}{2}x + \frac{5}{2})\xi] +$$

$$+ y''[3x^2 + 15x + \frac{33}{2} + 3x^2 + \frac{33}{2}x + \frac{55}{4} + \frac{7}{8x}]\xi +$$

$$+y'[x^2+9x+\frac{43}{4}+\frac{1}{4x}+(x^2+\frac{19}{2}x+\frac{59}{4}+\frac{19}{8x}-\frac{1}{8x^2})\xi]+$$
$$+y[x+\frac{5}{2}+(x+3+\frac{5}{4x})\xi]=0.$$

Für die Grössen τ und σ ergaben sich folgende Werthe:

$$\tau_0=\frac{b}{3}-\beta,\ \tau_1=\frac{2b}{9}+\frac{8\beta}{3.5}$$

$$\tau_2=\frac{76b}{3.5.7.9}-\frac{22\beta}{5.7.9}$$

$$\tau_3=\frac{776b}{3.5.7.9.9}+\frac{626\beta}{5.5.9.9}$$

$$\tau_4=\frac{3184b}{3.3.5.5.7.9.9.11}-\frac{146554\beta}{3.5.5.7.9.9.11}$$

$$\tau_5=\frac{2166321116b}{3.5.5.7\ 7.9.9.9.11.13}+\frac{20662108\beta}{5.7.7.9.9.9.11.13}$$

$$\sigma_0=\frac{b}{3}-\beta$$

$$\sigma_1=\frac{23\beta}{3.5}-\frac{b}{9}$$

$$\sigma_2=-\frac{29b}{3.5.7.9}-\frac{673\beta}{5.7.9}$$

$$\sigma_3=\frac{1559b}{3.5.7.9.9}+\frac{44207\beta}{5.5.7.9.9}$$

$$\sigma_4=-\frac{611441b}{3.3.5.5.7.9.9.11}-\frac{2386693\beta}{3.5.5.7.9.9.11}$$

$$\sigma_5=\frac{381429931b}{3.5.5.7\ 7.9.9.9.11.13}+\frac{3766678485\beta}{3.5.5.7\ 7.9.9.9.11.13}.$$